LIBRIS | We know b

MINISTERUL EDUCAȚIEI

Niculae Ghiciu (coord.)
Emilia Iancu
Vicențiu Rusu
Florentina Amalia Enea
Maria Popescu

MATEMATICĂ



Manual pentru
clasa a VI-a

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ S.A.

LIBRIS We know books

Cuprins

PREZENTAREA MANUALULUI DE MATEMATICĂ PENTRU CLASA A VI-A **3**
RECAPITULARE CLASA A V-A şi TESTE INIŢIALE **7**
CAPITOLUL 1. MULŢIMI. MULŢIMEA NUMERELOR NATURALE **10**
Unitatea de învăţare: Mulţimi 10
LECŢIA 1. Mulţimi; mulţimea numerelor naturale 10
LECŢIA 2. Relaţii între mulţimi 13
LECŢIA 3. Operaţii cu mulţimi 16
Teste la final de unitate 19
Unitatea de învăţare: Mulţimea numerelor naturale 22
LECŢIA 4. Descompunerea numerelor naturale în produs de puteri de numere prime 22
LECŢIA 5. Determinarea *c.m.m.d.c.* şi a *c.m.m.m.c.*; numere prime între ele 25
LECŢIA 6. Proprietăţi ale divizibilităţii în $\mathbb{N}$ 28
Teste la final de unitate 31
Teme pentru portofoliu 33

CAPITOLUL 2. RAPOARTE. PROPORŢII **35**
Unitatea de învăţare: Rapoarte şi proporţii 35
LECŢIA 1. Rapoarte. Procente, probleme în care intervin procente 35
LECŢIA 2. Proporţii; proprietatea fundamentală a proporţiilor 40
LECŢIA 3. Proporţii derivate 43
LECŢIA 4. Şir de rapoarte egale 46
Teste la final de unitate 49
Unitatea de învăţare: Mărimi 52
LECŢIA 5. Mărimi direct proporţionale 52
LECŢIA 6. Mărimi invers proporţionale 55
LECŢIA 7. Elemente de organizare a datelor; probabilităţi 58
Teste la final de unitate 62
Teme pentru portofoliu 65

CAPITOLUL 3. MULŢIMEA NUMERELOR ÎNTREGI **68**
Unitatea de învăţare: Numere întregi 1 68
LECŢIA 1. Mulţimea numerelor întregi 68
LECŢIA 2. Adunarea numerelor întregi, proprietăţi 72
LECŢIA 3. Scăderea numerelor întregi 75
LECŢIA 4. Înmulţirea numerelor întregi, proprietăţi 78
LECŢIA 5. Împărţirea numerelor întregi 81
Teste la final de unitate 84
Unitatea de învăţare: Numere întregi 2 87
LECŢIA 6. Puterea cu exponent număr natural a unui număr întreg nenul 87
LECŢIA 7. Ordinea efectuării operaţiilor şi folosirea parantezelor 90
LECŢIA 8. Ecuaţii şi inecuaţii în mulţimea numerelor întregi 93
LECŢIA 9. Probleme care se rezolvă cu ecuaţii/inecuaţii în contextul numerelor întregi 97
Teste la final de unitate 100
Teme pentru portofoliu 102

CAPITOLUL 4. MULŢIMEA NUMERELOR RAŢIONALE **105**
Unitatea de învăţare: Numere raţionale 105
LECŢIA 1. Număr raţional; mulţimea numerelor raţionale 105

LIBRIS | We know books

LECȚIA 2. Adunarea numerelor raționale; proprietăți; scăderea numerelor raționale 108
LECȚIA 3. Înmulțirea numerelor raționale; proprietăți; împărțirea numerelor raționale 111
LECȚIA 4. Puterea cu exponent număr întreg a unui număr rațional nenul 114
LECȚIA 5. Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor 117
Teste la final de unitate 119
Unitatea de învățare: Ecuații 122
LECȚIA 6. Ecuații în mulțimea numerelor raționale 122
LECȚIA 7. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor în $\mathbb{Q}$ 125
Teste la final de unitate 127
Teme pentru portofoliu 130

CAPITOLUL 5. NOȚIUNI GEOMETRICE FUNDAMENTALE 134
Unitatea de învățare: Unghiuri 134
LECȚIA 1. Unghiuri suplementare, unghiuri complementare 134
LECȚIA 2. Unghiuri adiacente; bisectoarea unui unghi 137
LECȚIA 3. Unghiuri opuse la vârf. Unghiuri formate în jurul unui punct 140
Teste la final de unitate 143
Unitatea de învățare: Perpendicularitate 145
LECȚIA 4. Drepte perpendiculare în plan. Mediatoarea unui segment 145
Teste la final de unitate 151
Unitatea de învățare: Paralelism 154
LECȚIA 5. Drepte paralele; axioma paralelelor. Aplicații practice 154
LECȚIA 6. Criterii de paralelism 157
Teste la final de unitate 160
Unitatea de învățare: Cercul 163
LECȚIA 7. Cerc; elemente în cerc 163
LECȚIA 8. Pozițiile unei drepte față de un cerc. Pozițiile relative a două cercuri 166
Teste la final de unitate 169
Teme pentru portofoliu 171

CAPITOLUL 6. TRIUNGHIUL 174
Unitatea de învățare: Triunghiul 174
LECȚIA 1. Triunghiul; clasificare; perimetru 174
LECȚIA 2. Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi 178
LECȚIA 3. Construcția triunghiurilor 181
LECȚIA 4. Linii importante în triunghi 184
Teste la final de unitate 187
Unitatea de învățare: Congruențe 190
LECȚIA 5. Congruența triunghiurilor oarecare 190
LECȚIA 6. Criteriile de congruență a triunghiurilor dreptunghice 193
LECȚIA 7. Metoda triunghiurilor congruente 196
Teste la final de unitate 199
Unitatea de învățare: Triunghiuri particulare 202
LECȚIA 8. Proprietăți ale triunghiului isoscel 202
LECȚIA 9. Proprietăți ale triunghiului echilateral 205
LECȚIA 10. Proprietăți ale triunghiului dreptunghic 208
Teste la final de unitate 211
Teme pentru portofoliu 214

Evaluare finală 217

Răspunsuri 219

LIBRIS | We know books

Capitolul 1 MULȚIMI. MULȚIMEA NUMERELOR NATURALE

Unitatea de învățare: Mulțimi

LECȚIA 1. Mulțimi; mulțimea numerelor naturale

Atenție, începem!

Din ce este formată o mulțime?

A1. Precizați prin ce se caracterizează: trandafirii din *buchet*, pepenii din *grămadă*, trandafirul *singur*, cifrele din *grup*, literele din *grup*, parașutiștii din *formație*, păsările din *stol*, respectiv cuvântul *elevele*.



A2. Ce termen ar putea înlocui cuvintele: *buchet, grămadă, grup, formație, stol, cuvânt*?

Care este relația dintre element și mulțime?

A3. Răspundeți la următoarele întrebări:

a) *Trandafirul galben* face parte din mulțimea de trandafiri roșii?

b) Cifra 4 face parte din mulțimea de cifre? Dar cifra 3?

c) Litera *c* face parte din mulțimea de litere? Dar litera *a*?

d) De câte ori apare litera *e* în cuvântul *elevele*? Dar în mulțimea $\{e, l, v\}$?

Ce ne învață teoria?

1. O ***mulțime*** este formată din ***obiecte*** (fizice sau ale gândirii) care au o ***proprietate comună.***

Exemple: Mulțimea elevilor din clasa noastră; mulțimea cifrelor în baza 10.

2. Obiectele din care este formată o mulțime se numesc ***elementele mulțimii.*** Ele sunt distincte, iar ordinea lor nu este importantă.

Exemplu: Elementele mulțimii planetelor din Sistemul nostru Solar sunt: Jupiter, Marte, Mercur, Neptun, Pământ, Saturn, Venus, Uranus.

3. O mulțime formată din numere se numește ***mulțime numerică.***

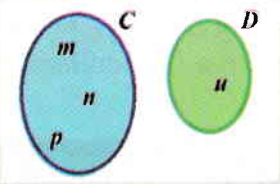
Exemple: Mulțimea cifrelor zecimale este o mulțime numerică; mulțimea județelor țării nu este o mulțime numerică.

LIBRIS We know books

4. Mulțimile se notează cu litere mari din alfabetul latin, cu sau fără indici: A, B, C, ... , A_1, A_2,... Mulțimea care nu are niciun element se numește ***mulțimea vidă*** și se notează cu simbolul $\varnothing$.

5. Mulțimile se reprezintă prin:

- **enumerarea elementelor între acolade**
  (Dacă A este mulțimea literelor din cuvântul *elevele*, scriem $A = \{e, l, v\}$),
- **proprietate caracteristică**
  (Dacă B este mulțimea resturilor împărțirii unui număr natural la 5, scriem $B = \{r \mid r$ este rest la împărțirea unui număr natural la $5\}$, de fapt $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$),
- **diagrame Venn-Euler**
  (Mulțimile $C = \{m, n, p\}$ și $D = \{u\}$, din figura alăturată).



6. Între un element și o mulțime vorbim de:

a) ***relația de apartenență***, dacă elementul se regăsește în mulțime și folosim simbolul „$\in$”;

b) ***relația de nonapartenență***, dacă elementul nu se regăsește în mulțime și folosim simbolul „$\notin$”.

***Exemple*: a)** Scriem: $2 \in \{x \mid x$ este cifră pară$\}$ și citim „2 aparține mulțimii cifrelor pare”.

b) Scriem: $3 \notin \{x \mid x$ este cifră pară$\}$ și citim „3 nu aparține mulțimii cifrelor pare”.

c) În diagrama de mai sus, $m \in C$ și $m \notin D$.

7. Mulțimile pot fi ***mulțimi finite*** (dacă numărul lor de elemente poate fi indicat printr-un număr natural) sau ***mulțimi infinite*** (în caz contrar). ***Cardinalul unei mulțimi X*** reprezintă numărul elementelor mulțimii X și îl notăm ***card$X$*** sau $|X|$.

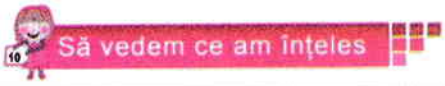
***Exemple*:**

a) Mulțimea $D_6 = \{d \mid d$ divide $6\} = \{1, 2, 3, 6\}$ este finită deoarece $cardD_6 = 4$;

b) $\{n \mid n \in \mathbb{N}, n$ este număr prim, $n \vdots 10\} = \varnothing$, iar $card\varnothing = 0$.

***Observație*:** $\{0\} \neq \varnothing$.

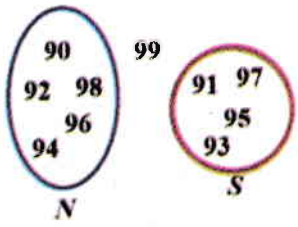
c) Mulțimile $\mathbb{N} = \{n \mid n$ este număr natural$\}$, $P = \{n \mid n = 2k, k \in \mathbb{N}\}$, $I = \{n \mid n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}\}$ sunt infinite.



Referindu-ne la diagrama Venn-Euler alăturată, să scriem:

a) relația dintre fiecare element și fiecare mulțime dată prin diagramă, precum și cardinalele acestor mulțimi;

b) elementele fiecărei mulțimi, prin enumerare și apoi folosind o proprietate caracteristică.



LIBRIS We know books

Învățăm să rezolvăm

1. Enumerați elementele mulțimii $A=\{x \mid x\in\mathbb{N}, x \text{ număr impar, cu } 3\le x<14\}$.

Rezolvare: Numerele care verifică inegalitățile din enunț sunt: 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13. Dintre acestea le selectăm pe cele impare și obținem $A=\{3, 5, 7, 9, 11, 13\}$.

2. Scrieți mulțimea $B=\{1,5,25,125,625\}$ folosind o proprietate caracteristică a elementelor.

Rezolvare: Observăm că toate elementele mulțimii B sunt puteri ale lui 5: $1=5^0$, $5=5^1$, $25=5^2$, $125=5^3$ și $625=5^2$, cu exponenții numere naturale de la 0 la 4. Astfel, mulțimea se poate scrie sub forma $B=\{5^n \mid n\in\mathbb{N}, 0\le n\le 4\}$.

Acum să rezolvăm singuri!

★

1. Dă exemple de mulțimi având ca elemente *obiecte*:
a) din clasa ta; **b)** de la matematică; **c)** de la geografie; **d)** de la limba română.

2. Găsește greșeala și rescrie corect mulțimile: $A=\{3, 5, 7, 9, 5\}$; $B=\{x, y, x, z\}$; $C=\{3, 3, 3\}$; $D=\{2, b, 3, b\}$; $E=\{3, a, 5, a, 3\}$.

3. Scrie mulțimea cifrelor numărului: **a)** 233696; **b)** 44223; **c)** 100000; **d)** 111111.

4. Reprodu și completează spațiile punctate cu simbolul potrivit „$\in$” sau „$\notin$”:
a) $2 \ldots \{1, 2, 3\}$; **b)** $m \ldots \{a, b, c\}$; **c)** $7 \ldots \{5, 7, 6, 8\}$; **d)** $0 \ldots \varnothing$.

5. Reprezintă în trei moduri mulțimile: $A=$ Mulțimea cifrelor impare;
$B=$ Mulțimea vocalelor alfabetului latin; $C=$ Mulțimea multiplilor lui 4, mai mici decât 30;
$D=$ Mulțimea numerelor naturale care, înmulțite cu 3, dau 18; $E=$ Mulțimea divizorilor lui 9.

★★

6. Stabilește valoarea de adevăr a următoarelor enunțuri:
a) $2\in\{x \mid x\in\mathbb{N}, 3\cdot x-1\}$; **b)** $3\in\{x \mid x=2n, n\in\mathbb{N}\}$; **c)** $0\notin\{x \mid x\in\mathbb{N}, x^2\le 4\}$.

7. Reprezintă fiecare mulțime prin enumerarea elementelor sale:
$A=\{x \mid x\in\mathbb{N}, x<7\}$, $B=\{x \mid x\in\mathbb{N}, 3\le x<8\}$, $C=\{x \mid x\in\mathbb{N}, 7\vdots x\}$,
$D=\{x \mid x\in\mathbb{N}, x+3=4\}$, $E=\{x \mid x\in\mathbb{N}^*, x-1\le 2\}$.

★★★

8. Reprezintă fiecare mulțime, folosind proprietatea caracteristică a elementelor sale:
$A=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$, $B=\{0,2,4,\ldots,16\}$, $C=\{1,3,5,7,\ldots,15\}$,
$D=\{0,3,6,9,12,15\}$, $E=\{0,1,4,9,16,25,36\}$.

9. Precizează care dintre următoarele mulțimi sunt finite și care sunt infinite:
$A=\{x \mid x\in\mathbb{N}, 5\cdot x+4=19\}$, $B=\{x \mid x\in\mathbb{N}, x-7<3\}$,
$C=\{x \mid x=3n, n\in\mathbb{N}\}$, $D=\{x \mid x=3n+2, n\in\mathbb{N}\}$.

LIBRIS We know books

LECȚIA 2. Relații între mulțimi

Atenție, începem!

Ce înțelegem prin *mulțimi egale?*

A1. Prin ce se caracterizează *mulțimea vidă?* Arătați că mulțimile: A = {*ianuarie, martie, mai, iulie, august, octombrie, decembrie*} și B = {x|x *lună a anului care are 31 de zile*} au aceleași elemente.

A2. Arătați că mulțimea C a literelor cuvântului *analog* este egală cu mulțimea D a literelor cuvântului *golan*.

Ce înțelegem prin submulțime sau parte (mulțime inclusă în altă mulțime) a unei mulțimi?

A3. Dacă A este mulțimea literelor cuvântului *răstit* și B cea a literelor cuvântului *săritor*, scrieți mulțimile A și B prin enumerarea elementelor și răspundeți la întrebările:

a) Orice element al mulțimii A este element al mulțimii B?
Este mulțimea A inclusă în B? Este A submulțime a lui B?

b) Există cel puțin un element al lui B care nu aparține lui A?
Este mulțimea B inclusă în A? Este B submulțime a lui A?



A4. Indicați patru submulțimi ale mulțimii scaunelor de pe stadionul din figură.

Ce ne învață teoria?

1. Două mulțimi A și B sunt ***egale*** dacă au ***aceleași elemente.*** Notăm $A = B$.
Două mulțimi A și B, care nu au *aceleași elemente*, nu sunt egale, chiar dacă au același număr de elemente. Notăm $A \neq B$.

***Exemple*:**

a) Mulțimea M = {*c, o, ș*} a literelor cuvântului „cocoș” și mulțimea N = {*c, o, ș*} a literelor cuvântului „șoc” sunt egale. Notăm $M = N$.

b) Mulțimile $D_3 = \{n \mid n \in \mathbb{N}, n \mid 3\} \neq D_5 = \{n \mid n \in \mathbb{N}, n \mid 5\}$, deoarece $3 \in D_3 = \{1,3\}$ și $3 \notin D_5 = \{1,5\}$.

2. O mulțime A este ***submulțime*** a mulțimii B (sau mulțimea A este inclusă în mulțimea B) dacă fiecare element x din A este în același timp și element al mulțimii B. Notăm $A \subseteq B$. Dacă cel puțin un element al mulțimii A nu este element al mulțimii B, atunci A nu este submulțime a lui B și notăm $A \not\subseteq B$.

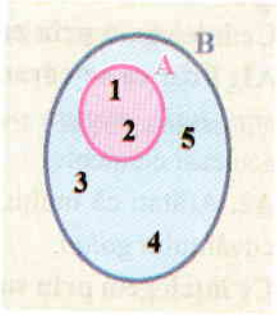
3. Mulțimea vidă este submulțime a oricărei mulțimi. Orice mulțime A are submulțimile A și $\varnothing$, numite ***submulțimi improprii***. Orice submulțime a lui A, diferită de $\varnothing$ și de A, dacă există, se numește ***submulțime proprie*** a lui A. Dacă $A \subseteq B$ și $B \subseteq A$, atunci $A = B$.

LIBRIS | We know books

4. Mulțimea tuturor submulțimilor unei mulțimi M formează **mulțimea părților mulțimii** M și se notează $P(M)$.

Exemple:

a) În figura alăturată mulțimea $A = \{1, 2\}$ este o submulțime a mulțimii $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ pentru că cele două elemente ale lui A sunt în același timp și elemente ale lui B; notăm $A \subset B$;



b) Mulțimea $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ nu este submulțime a lui $C = \{1, 2, 3, 4, 6\}$, pentru că $5 \in B$, dar $5 \notin C$; notăm $B \not\subset C$.

c) Dacă A este mulțimea literelor cuvântului „pici" și B mulțimea literelor cuvântului „cip", atunci $A = \{p, i, c\}$ și $B = \{c, i, p\}$. Prin urmare $A \subseteq B$ și $B \subseteq A$. Deci $A = B$.

d) Mulțimea $A = \{0, 1, 2\}$ are următoarele submulțimi: $\varnothing$, $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{0, 1\}$, $\{0, 2\}$, $\{1, 2\}$, A. Acestea formează mulțimea părților lui A, $P(A) = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, A\}$.

Să vedem ce am înțeles

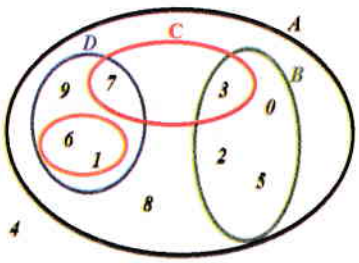
Referindu-ne la diagrama Venn-Euler alăturată:

a) să scriem un element din mulțimea B și relația dintre acesta și celelalte mulțimi;

b) să scriem relația dintre mulțimea B și celelalte mulțimi;

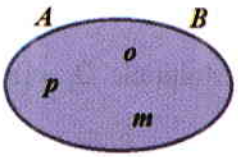
c) să scriem două submulțimi ale mulțimii D;

d) să scriem patru mulțimi care nu sunt incluse în D.

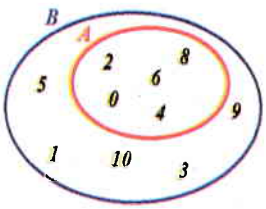


Învățăm să rezolvăm

1. Fie mulțimile $A = \{x \mid x$ este literă a cuvântului *pom*$\}$ și $B = \{x \mid x$ este literă a cuvântului *mop*$\}$. Stabiliți dacă $A = B$.



Rezolvare: $m \in A$ și $m \in B$, $o \in A$ și $o \in B$, de asemenea $p \in A$ și $p \in B$. Deci $A = B$.



2. Stabiliți relația dintre mulțimile $A = \{x \mid x$ este cifră pară$\}$ și $B = \{x \mid x \le 10, x \in \mathbb{N}\}$.

Rezolvare: $0 \in A$ și $0 \in B$, $2 \in A$ și $2 \in B$, $4 \in A$ și $4 \in B$, $6 \in A$ și $6 \in B$, $8 \in A$ și $8 \in B$. Deci toate elementele din A se află în B, adică $A \subseteq B$.

LIBRIS We know books

Acum să rezolvăm singuri!

★ **1.** Reprodu și înlocuiește spațiile punctate cu unul dintre simbolurile „⊂”, „⊄”sau „⊆”:

a) $\{b\}$ ... $\{a, b, c\}$; **b)** $\{2\}$ ... $\{1, 2, 4\}$; **c)** $\{l, m\}$ ... $\{l, m, n\}$;

d) $\{l, m, n\}$ ... $\{l, m, n\}$; **e)** $\{0\}$ ... $\varnothing$.

2. Reprodu și completează enunțul cu simbolul potrivit: „=” sau „≠”. Dacă A este mulțimea formată din literele cuvântului *pepene* și B este mulțimea formată din literele cuvântului *pene*, atunci A ... B.

3. Descoperă și corectează greșeala:

a) $\Delta \subset \{\Delta, \bigcirc, \square\}$; **b)** $\{a, b, c\} = \{x, y, z\}$; **c)** $\varnothing \in \{0\}$;

d) $\{x \in \mathbb{N} \mid 6 \vdots x\} \supset \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \vdots x\}$; **e)** $\{x \in \mathbb{N} \mid x : 3 = 2\} \subseteq \{6\}$;

f) $\{x \mid x$ este ultima cifră a puterilor lui $3\} \subseteq \{1, 3, 7, 9\}$; **g)** $\{x \in \mathbb{N} \mid 6 \vdots x\} \supset \{x \in \mathbb{N} \mid 3 \vdots x\}$;

h) $\{3n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \{0, 3, 6, 9, 12\}$; **i)** $\{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 4\} \subset \{1, 2, 3\}$;

j) $\{n \mid 2^n = 1\} \subset \{0, 1\}$; **k)** $\{x \in \mathbb{N} \mid x \cdot 2 = 6\} \subset \{1, 2, 3\}$;

l) $\{x \in \mathbb{N} \mid 2x + 1 \leq 3\} \subseteq \{0, 1\}$; **m)** $\{x \in \mathbb{N} \mid 3x - 2 = 1\} \subseteq \{2x - 1 < 3\}$.

4. Determină x, astfel încât mulțimea $\{x, 2\}$ să fie submulțime a mulțimii $\{1, 2, 3\}$.

5. Fie mulțimile $A = \{x \mid x$ este *cifră pară*$\}$ și $B = \{0, x, 4, 6, 8\}$. Stabiliți valoarea lui x, dacă $A = B$.

6. Pentru mulțimea $A = \{a, b, c\}$, scrie:

a) submulțimile improprii; **b)** toate submulțimile.

★★ **7.** Pentru numărul 12, scrie mulțimea divizorilor:

a) proprii; **b)** improprii.

8. Scrie submulțimea multiplilor lui 2:

a) mai mici decât 12; **b)** cel mult egali cu 14.

9. Formulează o problemă cu același enunț ca cel al problemei 8, pentru numărul 3, apoi rezolvă problema.

10. Formulează o problemă cu același enunț ca cel al problemei 7, pentru numărul 14, apoi rezolvă problema.

★★★ **11.** Fie mulțimea $A = \{0, 2, 3, 6, 8, 9, 10, 12\}$. Scrie submulțimea mulțimii A formată din:

a) multiplii lui 2; multiplii lui 3; multiplii lui 4; multiplii lui 6;

b) divizorii lui 6; divizorii lui 8; divizorii lui 9; divizorii lui 10.

12. Scrie două submulțimi ale mulțimii $\{3, 6, 8, 15, 27\}$, care să satisfacă simultan condițiile:

a) nu au elemente comune; **b)** au aceeași sumă a elementelor.

LIBRIS | We know books

LECȚIA 3. Operații cu mulțimi

Atenție, începem!

A1. Într-o clasă a VI-a, sunt elevi care fac parte din echipa de fotbal a școlii, din echipa de handbal, din ambele echipe și elevi care nu fac sport.

Fie $A = \{Ionuț, George, Costin, Vasile, Petre, Sandu, Marius\}$ mulțimea elevilor care fac parte din echipa de fotbal, $B = \{Doru, Virgil, Petre, Vasile, George, Constantin, Eduard\}$ mulțimea elevilor care fac parte din echipa de handbal și C mulțimea elevilor care nu fac sport. Folosind reprezentarea prin diagrame a mulțimilor date, determinați:



a) mulțimea elevilor care fac parte atât din echipa de fotbal, cât și din echipa de handbal;

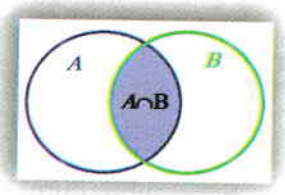
b) mulțimea celor care fac parte numai din echipa de fotbal, respectiv numai din cea de handbal;

c) mulțimea elevilor care fac parte din cel puțin una dintre echipele de fotbal sau de handbal;

d) mulțimea elevilor care sunt în echipa de handbal și care nu fac sport.

Ce ne învață teoria?

1. ***Intersecția*** a două mulțimi A și B este mulțimea formată din elementele comune mulțimilor A și B. Scriem $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$. Două mulțimi a căror intersecție este mulțimea vidă se numesc ***mulțimi disjuncte.***



Exemple:

a) Dacă $A = \{a,b,c\}$, $B = \{c,d,e\}$ și $C = \{d,e,f\}$ atunci $A \cap B = \{c\}$, iar $A \cap C = \emptyset$;

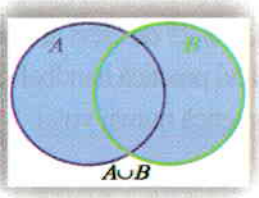
b) Intersecția mulțimii vide cu o mulțime oarecare M este mulțimea vidă: $M \cap \emptyset = \emptyset \cap M = \emptyset$.

c) ***Detectivul și intersecția mulțimilor.*** Celebrul detectiv Sherlock Holmes căuta numele unei nave cu pânze, pentru rezolvarea unui caz. El știa doar că, în ianuarie 1883, acea corabie fusese la Pondichéry (sud-estul Indiei), în ianuarie 1885, la Dundee (Scoția), iar în septembrie 1887, când se desfășura ancheta, corabia se afla în portul Londrei. Folosind aceste date, el a stabilit denumirea navei, constatând că din intersecția mulțimilor: corăbiilor aflate în ianuarie 1883 la Pondichéry, a celor aflate în ianuarie 1885 la Dundee și a celor aflate în septembrie 1887 la Londra a făcut parte o singură navă.



LIBRIS We know books

2. *Reuniunea* a două mulțimi A și B este mulțimea formată din elementele care aparțin cel puțin uneia dintre mulțimile A sau B. Scriem $A \cup B = \{x | x \in A \text{ sau } x \in B\}$.



Exemple:

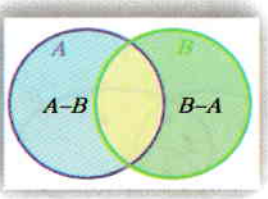
a) Reuniunea mulțimilor $A = \{1,2,3\}$ și $B = \{3,4,5,6\}$ este mulțimea $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}$.

b) Reuniunea mulțimii vide cu o mulțime oarecare M este mulțimea M: $M \cup \varnothing = \varnothing \cup M = M$.

3. *Diferența* dintre mulțimea A și mulțimea B este mulțimea formată din elementele lui A care nu aparțin lui B. Scriem

$$A \setminus B = \{x | x \in A \text{ și } x \notin B\}.$$

Observație: $A \setminus B \neq B \setminus A$.



Exemple:

a) Dacă $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 4, 5\}$ și $C = \{5, 6, 7\}$, atunci: $A \setminus B = \{2, 3\}$, $B \setminus A = \{5\}$, iar $A \setminus C = \varnothing$.

b) Diferența dintre o mulțime oarecare M și mulțimea vidă este mulțimea M: $M \setminus \varnothing = M$.

c) Diferența dintre mulțimea vidă și o mulțime oarecare M este mulțimea vidă: $\varnothing \setminus M = \varnothing$.

d) Diferența dintre o mulțime oarecare M și ea însăși este mulțimea vidă: $M \setminus M = \varnothing$.

Să vedem ce am înțeles

Considerăm mulțimile A, B, C, D, cu literele din cuvintele: *matematica*, *informatica*, *gramatica*, *aritmetica*. Să scriem prin enumerare:

a) mulțimile A, B, C, D;

b) 6 intersecții ale oricăror două dintre mulțimi;

c) reuniunile oricăror două dintre mulțimi;

d) 12 diferențe ale oricăror două dinttre mulțimi.

Învățăm să rezolvăm

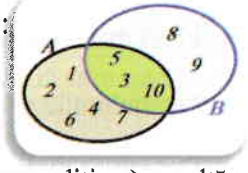
1. Determinați mulțimile A și B, știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

a) $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$;

b) $A \cap B = \{3,5,10\}$;

c) $A \cup \{2,4,6\} = \{1,2,3,4,5,6,7,10\}$;

d) $B \cup \{1,7\} = \{1,3,5,7,8,9,10\}$.

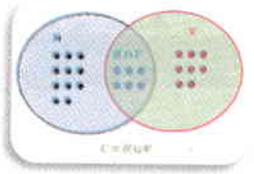


Rezolvare: Din condiția **b)** rezultă: $3 \in A$ și $3 \in B$; $5 \in A$ și $5 \in B$; $10 \in A$ și $10 \in B$. Din condiția **c)** rezultă: $1 \in A$, $3 \in A$, $5 \in A$, $7 \in A$, $10 \in A$. Din condiția **d)** rezultă: $3 \in B$, $5 \in B$, $8 \in B$, $9 \in B$, $3 \in B$. Din condițiile **a)**, **b)**, **c)** și **d)** rezultă: $\{2, 4, 6\} \subset A$.

Deci, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10\}$ și $B = \{3, 5, 8, 9, 10\}$.

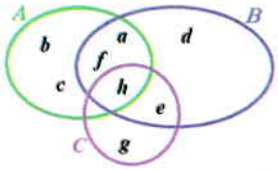
LIBRIS We know books

2. Cei 25 de elevi ai unei clase a VI-a practică cel puțin unul dintre sporturile volei sau handbal. Dacă 17 elevi practică handbal și 14 elevi practică volei, aflați câți elevi din clasă practică numai handbal și câți practică numai volei.



***Rezolvare*:** Fie C mulțimea elevilor clasei, H mulțimea elevilor clasei care practică handbal și V mulțimea celor care practică volei. Avem $|C| = 25$, $|H| = 17$, $|V| = 14$ și obținem $|H \cap V| = 17 + 14 - 25 = 6$. Atunci, $17 - 6 = 11$ elevi practică numai handbal și $14 - 6 = 8$ elevi practică numai volei.





1. În desenul alăturat sunt reprezentate mulțimile A, B și C.

a) Scrie mulțimile A, B și C prin enumerarea elementelor ;

b) Scrie următoarele mulțimi prin enumerare: $D = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$; $E = \{x \mid x \in B \text{ și } x \in C\}$; $M = \{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}$.

2. Identifică egalitățile adevărate:

a) $\{3\} \cap \{a\} = \varnothing$; **b)** $\{1\} \setminus \{2\} = \varnothing$; **c)** $\{5\} \cup \{1\} = \{1, 5\}$; **d)** $\{5\} \cap \{1, 5\} = \varnothing$;

e) $\{1, 5\} \cup \varnothing = \varnothing$; **f)** $\{2, 3, 4\} \cap \varnothing = \{2, 3, 4\}$; **g)** $\{2, 3\} \setminus \mathbb{N} = \varnothing$.

3. Fie mulțimile: $A = \{1, 2, 3, 5\}$, $B = \{0, 2, 4, 6\}$ și $C = \{1, 3, 6, 7, 8, 9\}$. Calculează:

$A \cup B$; $B \cup A$; $A \cap B$; $(A \cup B) \cup C$;

$A \cup (B \cup C)$; $B \cap A$; $A \setminus B$; $B \setminus A$;

$(A \setminus B) \setminus C$; $A \setminus (B \setminus C)$.

4. Fie $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x \leq 16\}$ și $B = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x^3 \leq 64\}$. Calculează:

$A \cap B$; $A \cup B$; $A \setminus B$; $B \setminus A$.

5. Fie mulțimea $C = \{a, b, c\}$. Scrie câte două mulțimi A și B, ale mulțimii C, astfel încât:

a) $A \cup B = C$; **b)** $A \cap B = C$; **c)** $A \setminus B = C$.

★★

6. Fie A și B două mulțimi, cu $|A| = 12$ și $|B| = 10$. Determină:

a) $|A \cap B|$, dacă $|A \cup B| = 15$; **b)** $|A \cup B|$, dacă $|A \cap B| = 5$;

c) cel mai mare și cel mai mic cardinal posibil pentru $A \cup B$ și $A \cap B$.

7. Fie mulțimile $A = \{1, 2, x\}$ și $B = \{1, y, 3\}$. Determină x și y, astfel încât $A \cap B = A \cup B$.

★★★

8. Determină mulțimile X și Y, știind că îndeplinesc simultan condițiile:

a) $X \setminus Y = \{3, 4, 5\}$; **b)** $Y \cap X = \{0, 1\}$; **c)** $X \cup Y = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

9. Fie $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq a, a \in \mathbb{N}\}$ și $B = \{x \in \mathbb{N} \mid a \leq x \leq 6, a \in \mathbb{N}\}$. Determină $a \in \mathbb{N}$ astfel încât $A \cap B = \{4\}$.

LIBRIS We know books

Proiect scratch

Modelează scenariul: „Bebe M" intră în scenă și spune „Mulțimi" pentru 2 secunde. Apoi spune „Dacă A = {1,2,3,4,5}" (cele 5 numere sunt aleatorii). Apoi apare „Big M" care întreabă: „Este adevărat că 3 se află în A (D/N)?" (număr aleatoriu). Se așteaptă răspunsul „D", adică Da, sau „N", adică Nu. Dacă răspunsul este corect, „Big M" spune „Bravo !", dacă nu, atunci „Big M" spune „Of!".

Teste la final de unitate

Test de autoevaluare

Copiază și completează tabelul cu litera corespunzătoare răspunsului corect și vei obține un cuvânt surpriză.

1	2	3	4	5	6	7

1. Dacă $A=\{a,l,f,b,e,t,r\}$, $B=\{a,r,i,t,m,e,c\}$, $C=\{i,m,c\}$, atunci C este:

a)	b)	c)	d)
diferența mulțimilor B și A	diferența mulțimilor A și B	reuniunea mulțimilor A și B	intersecția mulțimilor A și B

2. Dacă A este mulțimea numerelor naturale cel puțin egale cu 5 și B este mulțimea numerelor naturale mai mici decât 5, atunci *mulțimea vidă* este:

m)	n)	o)	p)
diferența mulțimilor B și A	diferența mulțimilor A și B	reuniunea mulțimilor A și B	intersecția mulțimilor A și B

3. Dacă A, B sunt mulțimi, atunci $C=(A-B)\cup(B-A)\cup(A\cap B)$ este:

a)	b)	c)	d)
reuniunea mulțimilor B și A	diferența mulțimilor A și B	diferența mulțimilor B și A	intersecția mulțimilor A și B

4. Mulțimea numerelor naturale obținute ca sumă de două numere naturale de două cifre este:

p)	q)	r)	s)
$\{21,22,22,...,197\}$	$\{10,11,12,...,99\}$	$\{20,21,22,...,198\}$	$\{0,1,2,...,18\}$

5. Cardinalul mulțimii numerelor naturale de două cifre distincte este:

t)	ț)	u)	v)
20	81	90	10